

基于外辐射源雷达系统的运动目标位置与速度解耦合估计方法

王 鼎^{1,2}, 尹洁昕^{1,2}, 王叶露¹, 徐文艳¹

(1. 中国人民解放军战略支援部队信息工程大学信息工程学院, 河南郑州 450001;
2. 国家数字交换系统工程技术研究中心, 河南郑州 450002)

摘 要: 针对位于地球表面的无线静默目标, 本文提出了一种基于外辐射源雷达系统的运动目标定位新方法. 与已有大多数定位方法不同, 新方法考虑了地面运动目标位置向量与速度向量所需服从的二次等式约束, 并且实现了对目标位置与速度的解耦合估计. 文中首先将基于外辐射源雷达系统的非线性观测方程转化为伪线性观测方程, 然后利用一阶误差分析方法推导该观测方程中的误差渐近统计特性, 并进而构建含双重二次等式约束的目标位置与速度联合估计准则. 针对此优化模型, 文中提出了一种基于拉格朗日乘子法的目标位置与速度解耦合优化算法, 其中仅需对目标位置向量进行迭代计算, 而目标速度向量是以闭式解的形式给出, 因此可减少迭代初始值的影响与局部收敛的风险. 此外, 文中还在双重二次等式约束条件下推导了基于外辐射源雷达系统的运动目标定位的克拉美罗界, 定量刻画了等式约束所产生的性能增益, 并结合一阶误差分析与拉格朗日乘子法证明了新方法的渐近统计有效性. 仿真实验结果验证了所提定位方法的优势.

关键词: 外辐射源雷达; 运动目标; 拉格朗日乘子法; 理论性能分析; 克拉美罗界; 解耦合参数估计

基金项目: 国家自然科学基金(No.62171469, No.62071029); 军委科技委高层次科技创新人才自主科研项目(No.a6102)

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2023)11-3011-13

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.12263/DZXB.20230759

Decoupled Estimation Method for Position and Velocity of Moving Target Based on Passive Radar System

WANG Ding^{1,2}, YIN Jie-xin^{1,2}, WANG Ye-lu¹, XU Wen-yan¹

(1. Institute of Information System Engineering, PLA Strategic Support Force Information Engineering University, Zhengzhou, Henan 450001, China;

2. National Digital Switching System Engineering and Technology Research Center, Zhengzhou, Henan 450002, China)

Abstract: In order to locate radio silent target on the Earth surface, a novel positioning method for moving target is proposed based on passive radar system. Unlike most existing positioning methods, this method takes into account the quadratic constraints that the target position vector and velocity vector need to satisfy, and can achieve decoupled estimation of the target position and velocity. Firstly, the nonlinear observation equations based on the passive radar system are transformed into pseudo-linear observation equations. Then, the asymptotic statistical properties of the errors in pseudo-linear equations are derived by applying the first-order error analysis. Subsequently, an optimization criterion is constructed for the joint estimation of the target position and velocity under the two quadratic equality constraints. For the purpose of obtaining the global optimal solution of the target position and velocity, a decoupled optimization algorithm is developed based on the Lagrange multiplier approach. This optimization algorithm requires only the iteration of the target position parameters, and the target velocity parameters can be obtained in a closed form, thus reducing the influence of initial values and the risk of local convergence. Furthermore, the Cramér-Rao bound (CRB) for moving target localization based on passive radar system is deduced under the two quadratic equality constraints, and the performance gain resulting from the equality constraints is quantified. The new estimator is also proved to be asymptotically statistically efficient by using the first-order error analysis as well as the Lagrange multiplier approach. Finally, simulation results verify the advantages of the pro-

posed positioning method.

Key words: passive radar; moving target; Lagrange multiplier approach; theoretical performance analysis; Cramér-Rao bound; decoupled parameter estimation

Foundation Item(s): National Natural Science Foundation of China (No.62171469, No.62071029); Independent Research Project for High-level Scientific and Technological Innovation Talents of the Science and Technology Commission of the Military Commission (No.a6102)

1 引言

运动目标定位问题在雷达、声呐以及无线传感网中具有重要的应用价值. 根据待定位目标是否会主动发射电磁信号, 可以将目标划分成两大类, 分别为辐射源目标与无线静默目标. 针对辐射源目标的定位系统通常称为无源定位系统^[1,2], 其中传感器被动接收目标所发射的信号, 并从中提取信号参数, 然后完成定位. 针对无线静默目标可以采用有源雷达系统^[3-5]进行定位, 典型的是 MIMO (Multiple Input Multiple Output) 雷达系统.

针对无线静默目标还可以采用外辐射源雷达系统^[6-8] (又称无源雷达系统) 进行定位, 该类系统的特点是无需自配发射源, 而是间接利用第三方发射的电磁信号探测目标. 在无源雷达系统中, 可供选择的外辐射源种类较多, 其中包括广播电台、电视发射台、微波移动通信基站等地面辐射源. 需要指出的是, 当接收天线远离这些地面辐射源时 (例如安装在机载或者舰载平台), 由于受到距离限制, 接收天线可能无法有效处理此类信号. 为此, 研究人员选择利用一些星载或者机载照射源作为外辐射源^[8], 例如导航卫星、低轨通信卫星以及同步轨道通信卫星等星载辐射源, 由于其远离地面, 覆盖范围广, 因此可以有效增加系统作用距离, 本文提出的定位方法主要适用于此类无源雷达系统.

针对运动目标最常使用的观测量是联合到达时间 (Time Of Arrival, TOA)/到达频率 (Frequency Of Arrival, FOA) 或者联合到达时间差 (Time Difference Of Arrival, TDOA)/到达频率差 (Frequency Difference Of Arrival, FDOA), 通过互模糊函数方法^[9] 或者最大似然 (Maximum Likelihood, ML) 方法^[10] 可以联合估计这些时频观测量, 其中时域观测量可以转化为距离 (差/和), 频域观测量可以转化为距离变化率 (差/和).

对于星载或者机载接收平台而言, 往往用于对地面目标进行定位, 此时若能将地球椭圆方程作为先验条件, 则将有利于提高目标定位精度. 文献[11]对地球椭圆约束的作用进行了定量分析, 其结果表明, 该二次等式约束对于提高目标定位精度至关重要. 文献[12]提出了双星对地面辐射源的 TOA/FOA 定位方法, 该方法通过求解一元多项式的根获得目标位置坐标、信号发射时间以及信号频率的闭式解. 文献[13]提出了基于多星观测平台的地面静止辐射源 TDOA 定位方法, 文献[14, 15]提出了基

于多星观测平台的地面运动辐射源 TDOA/FDOA 定位方法, 均能在心地固坐标系下获得渐近统计有效的定位结果. 文献[16]提出了基于无人机观测平台的地面辐射源定位方法, 不仅利用了 TDOA/FDOA 观测量, 还新增多普勒变化率观测量以提高定位精度. 另一方面, 对于地面运动目标而言, 除了其位置向量需要服从二次等式约束外, 速度向量同样也应服从特定等式约束, 文献[17, 18]提出了地面辐射源位置/速度服从双重二次等式约束条件下的 TDOA/FDOA 定位方法, 文献[19]针对基于星载或者机载外辐射源的雷达系统, 提出了目标位置/速度向量服从双重二次等式约束的定位方法, 这 3 种定位方法均属于闭式解型方法, 在小观测误差条件下都具有渐近统计有效性.

针对文献[19]中研究的雷达系统, 本文提出了一种新的无线静默运动目标定位方法, 新方法的主要特征在于, 实现了目标位置向量与速度向量的解耦估计, 其中仅需对目标位置向量进行迭代计算, 而目标速度向量是以闭式解的形式给出, 因此减少了对迭代初始值的影响以及局部收敛的风险. 此外, 该文还在双重二次等式约束条件下推导了运动目标定位的克拉美罗界 (Cramér-Rao Bound, CRB), 并且结合一阶误差分析与拉格朗日乘子法证明新方法具有渐近统计有效性. 仿真实验验证了新方法的优越性和文中理论性能分析的有效性.

2 定位观测模型与问题形成

在描述定位观测模型之前, 首先需要指出本文的位置向量与速度向量均是在心地固坐标系 (Earth-Centered Earth-Fixed, ECEF) 下度量的.

如图 1 所示, 考虑某个基于星载或者机载外辐射源的雷达系统, 其可用于对地面目标进行定位, 该系统共包含 M 个外辐射源与 N 个接收机, 其中第 m 个外辐射源的位置向量记为 $\mathbf{u}_m^{(0)} = (x_m^{(0)}, y_m^{(0)}, z_m^{(0)})^T$, 速度向量记为 $\dot{\mathbf{u}}_m^{(0)} = (\dot{x}_m^{(0)}, \dot{y}_m^{(0)}, \dot{z}_m^{(0)})^T$, 第 n 个接收机的位置向量记为 $\mathbf{u}_n^{(r)} = (x_n^{(r)}, y_n^{(r)}, z_n^{(r)})^T$, 速度向量记为 $\dot{\mathbf{u}}_n^{(r)} = (\dot{x}_n^{(r)}, \dot{y}_n^{(r)}, \dot{z}_n^{(r)})^T$. 本文假设外辐射源与接收机的位置向量与速度向量精确已知.

假设地球表面存在一个待定位的运动目标, 其位置向量记为 $\mathbf{u}^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})^T$, 速度向量记为 $\dot{\mathbf{u}}^{(0)} = (\dot{x}^{(0)}, \dot{y}^{(0)}, \dot{z}^{(0)})^T$, 并令 $\tilde{\mathbf{u}}^{(0)} = [(\mathbf{u}^{(0)})^T (\dot{\mathbf{u}}^{(0)})^T]^T$ 表示目标位置/速度

向量. 由于目标位于地球表面, 不失一般性, 假设其为零高程, 此时根据文献[20]可以将目标位置向量 $\mathbf{u}^{(0)}$ 表示为

$$\mathbf{u}^{(0)} = \begin{bmatrix} \cos(\beta)\cos(\theta) \\ \cos(\beta)\sin(\theta) \\ (1-e^2)\sin(\beta) \end{bmatrix} \frac{r_e}{\sqrt{1-e^2(\sin(\beta))^2}} \quad (1)$$

式(1)中, θ 表示经度; β 表示纬度; $r_e = 6378.137$ km 表示地球赤道半径; $e = 0.081\ 819\ 790\ 992\ 113$ 表示地球第一偏心率. 基于式(1)可以得到如下等式约束^[14]:

$$h_1(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) = (\mathbf{u}^{(0)})^T \mathbf{A} \mathbf{u}^{(0)} = r_e^2 \quad (2)$$

式(2)中, $\mathbf{A} = \text{diag}\left\{1, 1, \frac{1}{1-e^2}\right\}$. 另一方面, 当目标在地球表面运动时, 其速度向量也需要服从等式约束, 将式(2)两边对时间求导可以得到如下约束关系式^[19]:

$$h_2(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) = (\dot{\mathbf{u}}^{(0)})^T \mathbf{A} \mathbf{u}^{(0)} = 0 \quad (3)$$

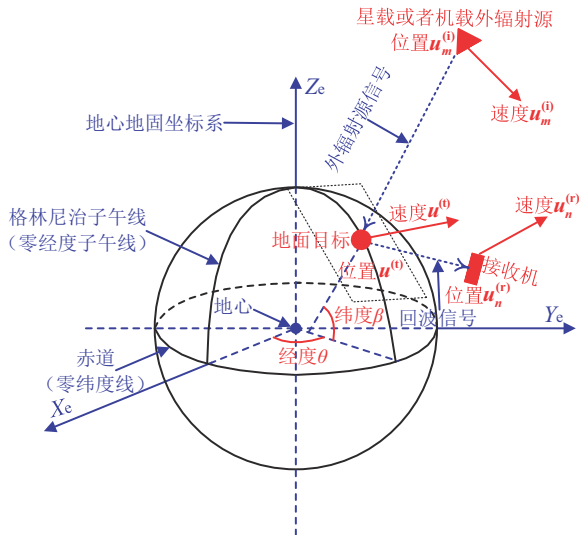


图1 本文的定位几何场景示意图

在基于外辐射源的雷达系统中, 每个接收机通过“时延-多普勒”处理可以获得关于运动目标的 M 个 TDOA 观测量与 M 个 FDOA 观测量. 与辐射源定位体制不同, 这里的 TDOA 是指外辐射源信号经过目标反射后到达接收机的回波信号与直达波信号的时间差, 在收发两端位置精确已知的条件下, 直达波信号的传播时间也是已知的, 此时 TDOA 观测量可以转化为外辐射源与目标之间的距离与接收机与目标之间的距离之和(下文简称距离和), 同理 FDOA 可以转化为距离和变化率. 不妨将第 n 个接收机获得的对应于第 m 个外辐射源的距离和与距离和变化率分别记为 d_{mn} 与 \dot{d}_{mn} , 则有

$$d_{mn} = d_m^{(0)} + d_n^{(0)}; \dot{d}_{mn} = \frac{dd_{mn}}{dt} = \dot{d}_m^{(0)} + \dot{d}_n^{(0)} \quad (4)$$

式(4)中, $d_m^{(0)} = \|\mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}_m^{(0)}\|_2$ 表示目标与第 m 个外辐射源之间的距离; $d_n^{(0)} = \|\mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}_n^{(0)}\|_2$ 表示目标与第 n 个接收机之

间的距离; $\dot{d}_m^{(0)} = \frac{dd_m^{(0)}}{dt} = \frac{(\dot{\mathbf{u}}^{(0)} - \dot{\mathbf{u}}_m^{(0)})^T (\mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}_m^{(0)})}{d_m^{(0)}}$ 表示目标与

第 m 个外辐射源之间的距离变化率; $\dot{d}_n^{(0)} = \frac{dd_n^{(0)}}{dt} = \frac{(\dot{\mathbf{u}}^{(0)} - \dot{\mathbf{u}}_n^{(0)})^T (\mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}_n^{(0)})}{d_n^{(0)}}$ 表示目标与第 n 个接收机之间的距离变化率.

实际中得到的距离和与距离和变化率的观测量都是含有观测误差的, 相应的观测模型如式(5)所示:

$$\hat{d}_{mn} = d_{mn} + \xi_{mn1}; \hat{\dot{d}}_{mn} = \dot{d}_{mn} + \xi_{mn2} \quad (5)$$

式(5)中, ξ_{mn1} 与 ξ_{mn2} 分别表示距离和观测误差与距离和变化率观测误差. 若将第 n 个接收机所获得的全部观测量合并成向量形式可得

$$\hat{\mathbf{d}}_n = \begin{bmatrix} \hat{d}_n \\ \hat{\dot{d}}_n \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{d}}_n + \tilde{\xi}_n = f_n(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) + \tilde{\xi}_n \quad (1 \leq n \leq N) \quad (6)$$

式(6)中, $\mathbf{d}_n = (d_{1n}, d_{2n}, \dots, d_{Mn})^T$ 表示没有误差的距离和观测向量; $\hat{\mathbf{d}}_n = (\hat{d}_{1n}, \hat{d}_{2n}, \dots, \hat{d}_{Mn})^T$ 表示含有误差的距离和观测向量; $\dot{\mathbf{d}}_n = (\dot{d}_{1n}, \dot{d}_{2n}, \dots, \dot{d}_{Mn})^T$ 表示没有误差的距离和变化率观测向量; $\hat{\dot{\mathbf{d}}}_n = (\hat{\dot{d}}_{1n}, \hat{\dot{d}}_{2n}, \dots, \hat{\dot{d}}_{Mn})^T$ 表示含有误差的距离和变化率观测向量; $\xi_{n1} = (\xi_{1n1}, \xi_{2n1}, \dots, \xi_{Mn1})^T$ 表示距离和观测误差向量; $\xi_{n2} = (\xi_{1n2}, \xi_{2n2}, \dots, \xi_{Mn2})^T$ 表示距离和变化率观测误差向量; $\tilde{\mathbf{d}}_n = [\mathbf{d}_n^T \ \dot{\mathbf{d}}_n^T]^T = f_n(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})$ 表示没有误差并且与第 n 个接收机相关的全部观测向量; $f_n(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})$ 表示由式(4)确定的非线性函数; $\tilde{\xi}_n = [\xi_{n1}^T \ \xi_{n2}^T]^T$ 表示与第 n 个接收机相关的观测误差向量, 假设其服从均值为零、协方差矩阵为 $\Sigma_n = E[\tilde{\xi}_n \tilde{\xi}_n^T]$ 的高斯分布, 并且观测误差向量 $\tilde{\xi}_{n_1}$ 与 $\tilde{\xi}_{n_2}$ (其中 $n_1 \neq n_2$) 之间相互统计独立. 为了利用全部观测量进行定位, 需要将式(6)中的 N 组等式进行合并可得

$$\hat{\tilde{\mathbf{r}}}_j = [\hat{\mathbf{d}}_1^T \ \hat{\mathbf{d}}_2^T \ \dots \ \hat{\mathbf{d}}_N^T]^T = \tilde{\mathbf{r}}_j + \tilde{\xi}_j = f_j(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) + \tilde{\xi}_j \quad (7)$$

式(7)中,

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{r}}_j = f_j(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) = [\tilde{\mathbf{d}}_1^T \ \tilde{\mathbf{d}}_2^T \ \dots \ \tilde{\mathbf{d}}_N^T]^T; \tilde{\xi}_j = [\tilde{\xi}_1^T \ \tilde{\xi}_2^T \ \dots \ \tilde{\xi}_N^T]^T \\ f_j(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) = [f_1(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})^T \ f_2(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})^T \ \dots \ f_N(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})^T]^T \end{cases} \quad (8)$$

观测误差向量 $\tilde{\xi}_j$ 服从均值为零、协方差矩阵为 $\Sigma_j = E[\tilde{\xi}_j \tilde{\xi}_j^T] = \text{blkdiag}\{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_N\}$ 的高斯分布.

3 克拉美罗界分析

3.1 无等式约束条件下的克拉美罗界表达式

在本文的定位模型中, 未知参数为向量 $\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}$, 观测量为向量 $\hat{\tilde{\mathbf{r}}}_j$, 相应的对数似然函数为

$$\ln[p_r(\hat{\tilde{\mathbf{r}}}_j | \tilde{\mathbf{u}}^{(0)})] = C - \frac{1}{2} [\hat{\tilde{\mathbf{r}}}_j - f_j(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})]^T \Sigma_j^{-1} [\hat{\tilde{\mathbf{r}}}_j - f_j(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})] \quad (9)$$

式(9)中, Σ_j 表示观测误差向量 $\tilde{\xi}_j$ 的协方差矩阵, 其具

有块状对角结构; C 表示与参数向量 $\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}$ 无关的常数. 在无等式约束条件下, 基于式(9)可以得到关于向量 $\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}$ 的 CRB 表达式, 如式(10)所示:

$$\text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) = \left(\mathbb{E} \left[\frac{\partial \ln[p_r(\hat{\mathbf{z}}_j | \tilde{\mathbf{u}}^{(0)})]}{\partial \tilde{\mathbf{u}}^{(0)}} \frac{\partial \ln[p_r(\hat{\mathbf{z}}_j | \tilde{\mathbf{u}}^{(0)})]}{(\partial \tilde{\mathbf{u}}^{(0)})^T} \right] \right)^{-1} \quad (10)$$

$$= ([F_j(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})]^T \Sigma_j^{-1} F_j(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}))^{-1}$$

$$F_n(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) = \begin{bmatrix} [\rho_1^{(0)} \rho_2^{(0)} \cdots \rho_M^{(0)}]^T + \mathbf{1}_M (\rho_n^{(r)})^T & \mathbf{O}_{M \times 3} \\ [\Pi^\perp [\rho_1^{(0)}] \eta_1^{(0)} \Pi^\perp [\rho_2^{(0)}] \eta_2^{(0)} \cdots \Pi^\perp [\rho_M^{(0)}] \eta_M^{(0)}]^T + \mathbf{1}_M (\Pi^\perp [\rho_n^{(r)}] \eta_n^{(r)})^T & [\rho_1^{(0)} \rho_2^{(0)} \cdots \rho_M^{(0)}]^T + \mathbf{1}_M (\rho_n^{(r)})^T \end{bmatrix} \quad (12)$$

式(12)中,

$$\begin{cases} \rho_m^{(0)} = \frac{\mathbf{u}^{(l)} - \mathbf{u}_m^{(0)}}{\|\mathbf{u}^{(l)} - \mathbf{u}_m^{(0)}\|_2}; \rho_n^{(r)} = \frac{\mathbf{u}^{(l)} - \mathbf{u}_n^{(r)}}{\|\mathbf{u}^{(l)} - \mathbf{u}_n^{(r)}\|_2} \\ \eta_m^{(0)} = \frac{\dot{\mathbf{u}}^{(l)} - \dot{\mathbf{u}}_m^{(0)}}{\|\mathbf{u}^{(l)} - \mathbf{u}_m^{(0)}\|_2}; \eta_n^{(r)} = \frac{\dot{\mathbf{u}}^{(l)} - \dot{\mathbf{u}}_n^{(r)}}{\|\mathbf{u}^{(l)} - \mathbf{u}_n^{(r)}\|_2} \\ \Pi^\perp [\rho_m^{(0)}] = \mathbf{I}_3 - \frac{(\mathbf{u}^{(l)} - \mathbf{u}_m^{(0)})(\mathbf{u}^{(l)} - \mathbf{u}_m^{(0)})^T}{\|\mathbf{u}^{(l)} - \mathbf{u}_m^{(0)}\|_2^2} \\ \Pi^\perp [\rho_n^{(r)}] = \mathbf{I}_3 - \frac{(\mathbf{u}^{(l)} - \mathbf{u}_n^{(r)})(\mathbf{u}^{(l)} - \mathbf{u}_n^{(r)})^T}{\|\mathbf{u}^{(l)} - \mathbf{u}_n^{(r)}\|_2^2} \end{cases} \quad (13)$$

将式(11)代入式(10)中, 并利用 Σ_j 的块状对角结构可得

$$\text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) = \left(\sum_{n=1}^N [F_n(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})]^T \Sigma_n^{-1} F_n(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) \right)^{-1} \quad (14)$$

由该式可知, 随着接收机个数 N 的增加, CRB 的值 $\text{trace}[\text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})]$ 会单调下降.

$$P_g = \text{trace}[\text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) [H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})]^T [H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) \text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) (H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}))^T]^{-1} H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) \text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})] \quad (17)$$

另一方面, 由于本文新考虑了关于目标速度的约束(即式(3)), 下面给出目标速度约束所带来的性能增益. 首先在仅有式(2)作为等式约束的条件下, 相比于无等式约束时的性能增益应为

$$P_{g0} = \text{trace} \left[\frac{\text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) [H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})]^T \mathbf{i}_2^{(0)} (\mathbf{i}_2^{(0)})^T H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) \text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})}{(\mathbf{i}_2^{(0)})^T H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) \text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) [H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})]^T \mathbf{i}_2^{(0)}} \right] \quad (18)$$

式(18)中, $\mathbf{i}_2^{(0)}$ 表示单位矩阵 \mathbf{I}_2 中的第 1 列向量. 因此,

$$\Pi^\perp [[H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) \text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) (H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}))^T]^{1/2} \mathbf{i}_2^{(0)}] = \mathbf{I}_2 - \frac{[H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) \text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) (H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}))^T]^{1/2} \mathbf{i}_2^{(0)} (\mathbf{i}_2^{(0)})^T [H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) \text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) (H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}))^T]^{1/2}}{(\mathbf{i}_2^{(0)})^T H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) \text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) [H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})]^T \mathbf{i}_2^{(0)}} \quad (21)$$

利用正交投影矩阵的半正定性可得 $\mathbf{X} \geq \mathbf{O}$, 于是由式(19)可知 $\Delta P \geq 0$.

4 新方法的基本原理

4.1 新方法的总体描述

新方法的目的是获得目标位置向量 $\mathbf{u}^{(0)}$ 与目标速度向量 $\dot{\mathbf{u}}^{(0)}$ 的渐近统计有效估计值, 并且保持较高的误差阈

式(10)中,

$$F_j(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) = \frac{\partial f_j(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})}{\partial (\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})^T} = [(F_1(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}))^T (F_2(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}))^T \cdots (F_N(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}))^T]^T \quad (11)$$

其中, $F_n(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) = \frac{\partial f_n(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})}{\partial (\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})^T}$ 为 Jacobian 矩阵, 相应的表达式为

3.2 含有等式约束条件下的克拉美罗界表达式

结合式(2)与式(3)可知, 向量 $\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}$ 需要满足双重等式约束 $h(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) = \begin{bmatrix} h_1(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) \\ h_2(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_c^2 \\ 0 \end{bmatrix}$, 根据文献[21]中的结论可知, 在等式约束条件下关于向量 $\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}$ 的 CRB 表达式如式(15):

$$\text{CRB}^{(c)}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) = \text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) - \text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) [H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})]^T \times [H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) \text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) (H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}))^T]^{-1} \times H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) \text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) \quad (15)$$

式(16)中,

$$H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) = \frac{\partial h(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})}{\partial (\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})^T} = \begin{bmatrix} 2(\mathbf{u}^{(0)})^T \mathbf{A} & \mathbf{0}_3^T \\ (\dot{\mathbf{u}}^{(0)})^T \mathbf{A} & (\mathbf{u}^{(0)})^T \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (16)$$

式(15)中的上角标 c 表示含有等式约束的 CRB. 不难验证, 式(15)右侧第 2 项是半正定矩阵, 于是有 $\text{trace}[\text{CRB}^{(c)}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})] \leq \text{trace}[\text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})]$, 即等式约束有助于提高参数估计精度, 并且估计 MSE 的性能增益(定义为 P_g)由此半正定矩阵所确定, 如式(17)所示:

由目标速度约束所产生的性能增益等于

$$\Delta P = P_g - P_{g0} = \text{trace}[\text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) [H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})]^T \mathbf{X} H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) \text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})] \quad (19)$$

式(20)中,

$$\mathbf{X} = [H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) \text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) (H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}))^T]^{-1/2} \times \Pi^\perp [[H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) \text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) (H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}))^T]^{1/2} \mathbf{i}_2^{(0)}] \times [H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) \text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) (H(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}))^T]^{-1/2} \quad (20)$$

其中,

值. 由于观测模型式(4)具有较强的非线性特性, 文中首先通过引入辅助变量获得关于式(4)的伪线性观测方程. 注意到辅助变量虽然是关于目标位置向量 $\mathbf{u}^{(0)}$ 的非线性函数, 却是关于目标速度向量 $\dot{\mathbf{u}}^{(0)}$ 的线性函数, 考虑到等式约束式(3)也是关于目标速度向量 $\dot{\mathbf{u}}^{(0)}$ 的线性约束, 利用此代数特性, 新方法将致力于实现对目标位置向量与速度向量的解耦参数估计. 另一方面, 由于等

式约束的存在,文中提出利用拉格朗日乘法实现解耦合优化,仅需要对目标位置向量进行迭代计算,因而减少了参与迭代的变量维数,并降低了局部收敛的风险.

4.2 新方法的数学推导

4.2.1 伪线性观测方程

本小节将推导伪线性观测方程,为此引入辅助变量.根据式(4)中的第1式可知,当 $m \geq 2$ 时可以得到如下关系式:

$$\begin{aligned} d_{mn} - d_{1n} &= \|\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_m^{(t)}\|_2 - \|\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)}\|_2 \\ \Rightarrow (d_{mn} - d_{1n} + \|\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)}\|_2)^2 &= \|\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_m^{(t)}\|_2^2 \\ \Rightarrow 2(\mathbf{u}_m^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)})^T \mathbf{u}^{(t)} + 2(d_{mn} - d_{1n})\|\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)}\|_2 & \\ = \|\mathbf{u}_m^{(t)}\|_2^2 - \|\mathbf{u}_1^{(t)}\|_2^2 - (d_{mn} - d_{1n})^2, 2 \leq m \leq M & \end{aligned} \quad (22)$$

$$\mathbf{A}_{n1} = \begin{bmatrix} 2(\mathbf{u}_n^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)})^T & -2d_{1n} \\ 2(\mathbf{u}_2^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)})^T & 2(d_{2n} - d_{1n}) \\ 2(\mathbf{u}_3^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)})^T & 2(d_{3n} - d_{1n}) \\ \vdots & \vdots \\ 2(\mathbf{u}_M^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)})^T & 2(d_{Mn} - d_{1n}) \end{bmatrix}; \mathbf{b}_{n1} =$$

式(22)~(25)中仅利用了距离和观测信息,为了利用距离和变化率观测信息,可以分别将式(22)与式(23)两边对时间求导,从而得到下面两个关系式:

$$\begin{aligned} & (\dot{\mathbf{u}}_m^{(t)} - \dot{\mathbf{u}}_1^{(t)})^T \mathbf{u}^{(t)} + (\mathbf{u}_m^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)})^T \\ & \dot{\mathbf{u}}^{(t)} + (\dot{d}_{mn} - \dot{d}_{1n})\|\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)}\|_2 \\ & + (d_{mn} - d_{1n}) \frac{(\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)})^T (\dot{\mathbf{u}}^{(t)} - \dot{\mathbf{u}}_1^{(t)})}{\|\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)}\|_2} \\ & = (\mathbf{u}_m^{(t)})^T \dot{\mathbf{u}}_m^{(t)} - (\mathbf{u}_1^{(t)})^T \dot{\mathbf{u}}_1^{(t)} \\ & - (d_{mn} - d_{1n})(\dot{d}_{mn} - \dot{d}_{1n}), \\ & 2 \leq m \leq M \end{aligned} \quad (26)$$

$$\mathbf{A}_{n2} = \begin{bmatrix} (\dot{\mathbf{u}}_n^{(t)} - \dot{\mathbf{u}}_1^{(t)})^T & -\dot{d}_{1n} & (\mathbf{u}_n^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)})^T & -d_{1n} \\ (\dot{\mathbf{u}}_2^{(t)} - \dot{\mathbf{u}}_1^{(t)})^T & \dot{d}_{2n} - \dot{d}_{1n} & (\mathbf{u}_2^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)})^T & d_{2n} - d_{1n} \\ (\dot{\mathbf{u}}_3^{(t)} - \dot{\mathbf{u}}_1^{(t)})^T & \dot{d}_{3n} - \dot{d}_{1n} & (\mathbf{u}_3^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)})^T & d_{3n} - d_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\dot{\mathbf{u}}_M^{(t)} - \dot{\mathbf{u}}_1^{(t)})^T & \dot{d}_{Mn} - \dot{d}_{1n} & (\mathbf{u}_M^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)})^T & d_{Mn} - d_{1n} \end{bmatrix}; \mathbf{b}_{n2} =$$

将式(24)与式(28)合并,能得到同时利用距离和与距离和变化率观测量的伪线性观测方程,如式(30)所示:

$$\mathbf{A}_n \boldsymbol{\theta} = \mathbf{b}_n, 1 \leq n \leq N \quad (30)$$

式(30)中,

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{O}_{M \times 4} \\ \mathbf{A}_{n2} \end{bmatrix}, \mathbf{b}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{n1} \\ \mathbf{b}_{n2} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(t)} \\ \|\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)}\|_2 \\ \dot{\mathbf{u}}^{(t)} \\ \frac{(\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)})^T (\dot{\mathbf{u}}^{(t)} - \dot{\mathbf{u}}_1^{(t)})}{\|\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)}\|_2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

当 $m=1$ 时,可以得到如下关系式:

$$\begin{aligned} d_{1n} &= \|\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)}\|_2 + \|\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_n^{(t)}\|_2 \\ \Rightarrow (d_{1n} - \|\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)}\|_2)^2 &= \|\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_n^{(t)}\|_2^2 \\ \Rightarrow 2(\mathbf{u}_n^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)})^T \mathbf{u}^{(t)} - 2d_{1n}\|\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)}\|_2 & \\ = \|\mathbf{u}_n^{(t)}\|_2^2 - \|\mathbf{u}_1^{(t)}\|_2^2 - d_{1n}^2 & \end{aligned} \quad (23)$$

将式(22)与式(23)中共 M 个等式进行合并,并写成矩阵形式可以得到如下伪线性观测方程:

$$\mathbf{A}_{n1} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(t)} \\ \|\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)}\|_2 \end{bmatrix} = \mathbf{b}_{n1} \quad (24)$$

式(24)中,

$$\mathbf{A}_{n1} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{u}_n^{(t)}\|_2^2 - \|\mathbf{u}_1^{(t)}\|_2^2 - d_{1n}^2 \\ \|\mathbf{u}_2^{(t)}\|_2^2 - \|\mathbf{u}_1^{(t)}\|_2^2 - (d_{2n} - d_{1n})^2 \\ \|\mathbf{u}_3^{(t)}\|_2^2 - \|\mathbf{u}_1^{(t)}\|_2^2 - (d_{3n} - d_{1n})^2 \\ \vdots \\ \|\mathbf{u}_M^{(t)}\|_2^2 - \|\mathbf{u}_1^{(t)}\|_2^2 - (d_{Mn} - d_{1n})^2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & (\dot{\mathbf{u}}_n^{(t)} - \dot{\mathbf{u}}_1^{(t)})^T \mathbf{u}^{(t)} + (\mathbf{u}_n^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)})^T \dot{\mathbf{u}}^{(t)} - \dot{d}_{1n}\|\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)}\|_2 \\ & - d_{1n} \frac{(\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)})^T (\dot{\mathbf{u}}^{(t)} - \dot{\mathbf{u}}_1^{(t)})}{\|\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)}\|_2} \end{aligned} \quad (27)$$

$$= (\mathbf{u}_n^{(t)})^T \dot{\mathbf{u}}_n^{(t)} - (\mathbf{u}_1^{(t)})^T \dot{\mathbf{u}}_1^{(t)} - d_{1n} \dot{d}_{1n}$$

将式(26)与式(27)中共 M 个等式进行合并,并写成矩阵形式可以得到如下伪线性观测方程:

$$\mathbf{A}_{n2} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(t)} \\ \|\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)}\|_2 \\ \dot{\mathbf{u}}^{(t)} \\ \frac{(\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)})^T (\dot{\mathbf{u}}^{(t)} - \dot{\mathbf{u}}_1^{(t)})}{\|\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)}\|_2} \end{bmatrix} = \mathbf{b}_{n2} \quad (28)$$

式(28)中,

$$\mathbf{A}_{n2} = \begin{bmatrix} (\mathbf{u}_n^{(t)})^T \dot{\mathbf{u}}_n^{(t)} - (\mathbf{u}_1^{(t)})^T \dot{\mathbf{u}}_1^{(t)} - d_{1n} \dot{d}_{1n} \\ (\mathbf{u}_2^{(t)})^T \dot{\mathbf{u}}_2^{(t)} - (\mathbf{u}_1^{(t)})^T \dot{\mathbf{u}}_1^{(t)} - (d_{2n} - d_{1n})(\dot{d}_{2n} - \dot{d}_{1n}) \\ (\mathbf{u}_3^{(t)})^T \dot{\mathbf{u}}_3^{(t)} - (\mathbf{u}_1^{(t)})^T \dot{\mathbf{u}}_1^{(t)} - (d_{3n} - d_{1n})(\dot{d}_{3n} - \dot{d}_{1n}) \\ \vdots \\ (\mathbf{u}_M^{(t)})^T \dot{\mathbf{u}}_M^{(t)} - (\mathbf{u}_1^{(t)})^T \dot{\mathbf{u}}_1^{(t)} - (d_{Mn} - d_{1n})(\dot{d}_{Mn} - \dot{d}_{1n}) \end{bmatrix} \quad (29)$$

接着将式(30)中的 N 个伪线性观测方程进行合并,得到如下扩维的伪线性观测方程:

$$\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\theta} = \mathbf{b}_1 \quad (32)$$

式(32)中, $\mathbf{A}_1 = [\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2^T \cdots \mathbf{A}_N^T]^T$, $\mathbf{b}_1 = [\mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_2^T \cdots \mathbf{b}_N^T]^T$. 由于 $\mathbf{A}_j \in \mathbb{R}^{2MN \times 8}$, 当 $MN \geq 4$ 时, 利用式(32)可知

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{b}_1 = (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{b}_1 \quad (33)$$

注释1 向量 $\boldsymbol{\theta}$ 中的第4个分量 $\|\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)}\|_2$ 与第8个分量 $\frac{(\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)})^T (\dot{\mathbf{u}}^{(t)} - \dot{\mathbf{u}}_1^{(t)})}{\|\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)}\|_2}$ 均可以理解为是辅助变量,由于这两个辅助变量的引入,不难发现向量 $\boldsymbol{\theta}$ 是关于于目标

位置/速度向量 $\hat{\mathbf{u}}^{(0)} = [(\mathbf{u}^{(0)})^T (\dot{\mathbf{u}}^{(0)})^T]^T$ 的非线性函数. 另一方面, 如果将目标位置向量与速度向量独立看待, 则向量 $\boldsymbol{\theta}$ 仍然是关于目标位置向量 $\mathbf{u}^{(0)}$ 的非线性函数, 但却是关于目标速度向量 $\dot{\mathbf{u}}^{(0)}$ 的线性函数, 而此代数特性正是文中定位方法的前提基础.

4.2.2 针对伪线性观测方程的一阶误差分析

将含有观测误差的观测矩阵 $\{\mathbf{A}_n\}_{1 \leq n \leq N}$ 与观测向量 $\{\mathbf{b}_n\}_{1 \leq n \leq N}$ 分别记为 $\{\hat{\mathbf{A}}_n\}_{1 \leq n \leq N}$ 与 $\{\hat{\mathbf{b}}_n\}_{1 \leq n \leq N}$, 则

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{A}}_{mn1} = \frac{\partial \mathbf{A}_n}{\partial d_{mn}} = \begin{bmatrix} -2\mathbf{1}_M (\mathbf{i}_8^{(4)})^T \\ -\mathbf{1}_M (\mathbf{i}_8^{(8)})^T \end{bmatrix}; \dot{\mathbf{A}}_{mn2} = \frac{\partial \mathbf{A}_n}{\partial \dot{d}_{mn}} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{M \times 8} \\ -\mathbf{1}_M (\mathbf{i}_8^{(4)})^T \end{bmatrix}, m=1 \\ \dot{\mathbf{A}}_{mn1} = \frac{\partial \mathbf{A}_n}{\partial d_{mn}} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{i}_M^{(m)} (\mathbf{i}_8^{(4)})^T \\ \mathbf{i}_M^{(m)} (\mathbf{i}_8^{(8)})^T \end{bmatrix}; \dot{\mathbf{A}}_{mn2} = \frac{\partial \mathbf{A}_n}{\partial \dot{d}_{mn}} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{M \times 8} \\ \mathbf{i}_M^{(m)} (\mathbf{i}_8^{(4)})^T \end{bmatrix}, 2 \leq m \leq M \end{cases} \quad (36)$$

$$\mathbf{B}_{n1} = \frac{\partial \mathbf{b}_n}{\partial \mathbf{d}_n^T} = \begin{bmatrix} -2d_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2(d_{2n} - d_{1n}) & 2(d_{1n} - d_{2n}) & 0 & \ddots & 0 \\ 2(d_{3n} - d_{1n}) & 0 & 2(d_{1n} - d_{3n}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 2(d_{Mn} - d_{1n}) & 0 & \dots & 0 & 2(d_{1n} - d_{Mn}) \\ -\dot{d}_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dot{d}_{2n} - \dot{d}_{1n} & \dot{d}_{1n} - \dot{d}_{2n} & 0 & \ddots & 0 \\ \dot{d}_{3n} - \dot{d}_{1n} & 0 & \dot{d}_{1n} - \dot{d}_{3n} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \dot{d}_{Mn} - \dot{d}_{1n} & 0 & \dots & 0 & \dot{d}_{1n} - \dot{d}_{Mn} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{B}_{n2} = \frac{\partial \mathbf{b}_n}{\partial \dot{\mathbf{d}}_n^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{M \times M} & \dots & 0 \\ -\dot{d}_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ d_{2n} - d_{1n} & d_{1n} - d_{2n} & 0 & \ddots & 0 \\ d_{3n} - d_{1n} & 0 & d_{1n} - d_{3n} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ d_{Mn} - d_{1n} & 0 & \dots & 0 & d_{1n} - d_{Mn} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{b}}_j = [\hat{\mathbf{b}}_1^T \hat{\mathbf{b}}_2^T \dots \hat{\mathbf{b}}_N^T]^T; \hat{\mathbf{A}}_j = [\hat{\mathbf{A}}_1^T \hat{\mathbf{A}}_2^T \dots \hat{\mathbf{A}}_N^T]^T \\ \mathbf{W}_j = \text{blkdiag}\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_N\} \end{cases} \quad (42)$$

由式(41)可知, 误差向量 $\boldsymbol{\psi}_j$ 渐近服从零均值的高斯分布, 并且其协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}_j &= \text{COV}(\boldsymbol{\psi}_j) \doteq \mathbf{W}_j \boldsymbol{\Sigma}_j \mathbf{W}_j^T \\ &= \text{blkdiag}\{\mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Sigma}_1 \mathbf{W}_1^T, \mathbf{W}_2 \boldsymbol{\Sigma}_2 \mathbf{W}_2^T, \dots, \mathbf{W}_N \boldsymbol{\Sigma}_N \mathbf{W}_N^T\} \end{aligned} \quad (43)$$

协方差矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_j$ 的表达式对获得渐近统计最优估计值至关重要.

4.2.3 定位优化准则与优化算法

(1) 定位优化准则

结合式(2)、式(3)、式(41)及式(43)可以构建估计目标位置向量 $\mathbf{u}^{(0)}$ 与速度向量 $\dot{\mathbf{u}}^{(0)}$ (亦即目标位置/速度向量 $\hat{\mathbf{u}}^{(0)}$) 的优化准则, 如式(44)所示:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{u}^{(0)}, \dot{\mathbf{u}}^{(0)}} \{\hat{\mathbf{g}}_a(\mathbf{u}^{(0)}, \dot{\mathbf{u}}^{(0)})\} = \min_{\mathbf{u}^{(0)}, \dot{\mathbf{u}}^{(0)}} \{\|\boldsymbol{\Phi}_j^{-1/2} \hat{\mathbf{b}}_j - \boldsymbol{\Phi}_j^{-1/2} \hat{\mathbf{A}}_j \boldsymbol{\theta}\|_2^2\} \\ \text{s.t. } (\mathbf{u}^{(0)})^T \mathbf{A} \mathbf{u}^{(0)} = r_c^2 \\ (\dot{\mathbf{u}}^{(0)})^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{u}}^{(0)} = 0 \end{cases} \quad (44)$$

不难看出, 式(44)是关于目标位置/速度向量 $\hat{\mathbf{u}}^{(0)}$ 的非凸二次等式约束优化问题, 其闭式解难以获得, 通常需要迭代求解. 直接对式(44)进行求解需要同时获得目标位置向量 $\mathbf{u}^{(0)}$ 与速度向量 $\dot{\mathbf{u}}^{(0)}$ 的迭代初始值, 由于其

利用一阶误差分析方法可以得到如下误差表达式:

$$\Delta \mathbf{A}_n = \hat{\mathbf{A}}_n - \mathbf{A}_n \doteq \sum_{m=1}^M \dot{\mathbf{A}}_{mn1} \zeta_{mn1} + \sum_{m=1}^M \dot{\mathbf{A}}_{mn2} \zeta_{mn2} \quad (34)$$

$$\Delta \mathbf{b}_n = \hat{\mathbf{b}}_n - \mathbf{b}_n \doteq \mathbf{B}_{n1} \boldsymbol{\zeta}_{n1} + \mathbf{B}_{n2} \boldsymbol{\zeta}_{n2} = \tilde{\mathbf{B}}_n \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n \quad (35)$$

式(35)中, $\tilde{\mathbf{B}}_n = [\mathbf{B}_{n1} \mathbf{B}_{n2}]$.

其中, $\mathbf{i}_8^{(4)}$ 和 $\mathbf{i}_8^{(8)}$ 分别表示单位矩阵 \mathbf{I}_8 中的第4列向量和第8列向量.

结合式(34)与式(35)可以将伪线性观测方程式(30)中的误差向量表示为

$$\boldsymbol{\psi}_n = \hat{\mathbf{b}}_n - \hat{\mathbf{A}}_n \boldsymbol{\theta} = \Delta \mathbf{b}_n - \Delta \mathbf{A}_n \boldsymbol{\theta} \doteq \mathbf{W}_n \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n \quad (1 \leq n \leq N) \quad (39)$$

式(39)中,

$$\mathbf{W}_n = \tilde{\mathbf{B}}_n - [\dot{\mathbf{A}}_{1n1} \boldsymbol{\theta} \dot{\mathbf{A}}_{2n1} \boldsymbol{\theta} \dots \dot{\mathbf{A}}_{Mn1} \boldsymbol{\theta} \quad \dot{\mathbf{A}}_{1n2} \boldsymbol{\theta} \dot{\mathbf{A}}_{2n2} \boldsymbol{\theta} \dots \dot{\mathbf{A}}_{Mn2} \boldsymbol{\theta}] \quad (40)$$

若将式(39)中的 N 个等式进行合并, 则可以得到扩维伪线性观测方程式(32)中的误差向量, 如式(41)所示:

$$\boldsymbol{\psi}_j = [\boldsymbol{\psi}_1^T \boldsymbol{\psi}_2^T \dots \boldsymbol{\psi}_N^T]^T = \hat{\mathbf{b}}_j - \hat{\mathbf{A}}_j \boldsymbol{\theta} \doteq \mathbf{W}_j \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_j \quad (41)$$

其中,

变量空间的维数较高,容易出现迭代发散和局部收敛现象,为此,下面提出一种目标位置向量 $\mathbf{u}^{(0)}$ 与速度向量 $\dot{\mathbf{u}}^{(0)}$ 的解耦合优化算法,其中仅需对目标位置向量 $\mathbf{u}^{(0)}$ 进行迭代计算即可,从而降低了出现迭代发散与局部收敛的风险,提高了优化算法的稳健性.

根据前面的讨论可知,向量 $\boldsymbol{\theta}$ 是关于速度向量 $\dot{\mathbf{u}}^{(0)}$ 的线性函数,而式(44)中的等式约束也是关于速度向量 $\dot{\mathbf{u}}^{(0)}$ 的线性约束,因此能够获得关于向量 $\dot{\mathbf{u}}^{(0)}$ 的最优闭式解. 首先基于向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的代数结构可以将矩阵 $\hat{\mathbf{A}}_j$ 进行如下分块:

$$\hat{\mathbf{A}}_j = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{j1} & \hat{\mathbf{a}}_{j2} & \hat{\mathbf{A}}_{j3} & \hat{\mathbf{a}}_{j4} \\ 2MN \times 3 & 2MN \times 1 & 2MN \times 3 & 2MN \times 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

此时结合式(31)与式(45)可得

$$\hat{\mathbf{b}}_j - \hat{\mathbf{A}}_j \boldsymbol{\theta} = \hat{\mathbf{c}}_j(\mathbf{u}^{(0)}) - \hat{\mathbf{D}}_j(\mathbf{u}^{(0)}) \dot{\mathbf{u}}^{(0)} \quad (46)$$

其中,

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{c}}_j(\mathbf{u}^{(0)}) = \hat{\mathbf{b}}_j + \frac{\hat{\mathbf{a}}_{j4}(\mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}_1^{(0)})^T}{\|\mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}_1^{(0)}\|_2} \dot{\mathbf{u}}^{(0)} - \hat{\mathbf{A}}_{j1} \mathbf{u}^{(0)} - \hat{\mathbf{a}}_{j2} \|\mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}_1^{(0)}\|_2 \\ \hat{\mathbf{D}}_j(\mathbf{u}^{(0)}) = \hat{\mathbf{A}}_{j3} + \frac{\hat{\mathbf{a}}_{j4}(\mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}_1^{(0)})^T}{\|\mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}_1^{(0)}\|_2} \end{cases} \quad (47)$$

因此,可以建立仅关于目标速度向量 $\dot{\mathbf{u}}^{(0)}$ 的约束优化问题,如式(48)所示:

$$\begin{cases} \min_{\dot{\mathbf{u}}^{(0)}} \{ \hat{\mathbf{g}}_b(\dot{\mathbf{u}}^{(0)}) \} = \min_{\dot{\mathbf{u}}^{(0)}} \{ \|\Phi_j^{-1/2} \hat{\mathbf{c}}_j(\mathbf{u}^{(0)}) - \Phi_j^{-1/2} \hat{\mathbf{D}}_j(\mathbf{u}^{(0)}) \dot{\mathbf{u}}^{(0)}\|_2^2 \} \\ \text{s.t. } (\dot{\mathbf{u}}^{(0)})^T \mathbf{A} \mathbf{u}^{(0)} = 0 \end{cases} \quad (48)$$

这是一个含有线性等式约束的二次优化问题,能够获得其最优闭式解,如式(49)所示:

$$\dot{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)} = \left(\mathbf{I}_3 - \frac{[(\hat{\mathbf{D}}_j(\mathbf{u}^{(0)}))^T \Phi_j^{-1} \hat{\mathbf{D}}_j(\mathbf{u}^{(0)})]^{-1} \mathbf{A} \mathbf{u}^{(0)} (\mathbf{u}^{(0)})^T \mathbf{A}}{(\mathbf{u}^{(0)})^T \mathbf{A} [(\hat{\mathbf{D}}_j(\mathbf{u}^{(0)}))^T \Phi_j^{-1} \hat{\mathbf{D}}_j(\mathbf{u}^{(0)})]^{-1} \mathbf{A} \mathbf{u}^{(0)}} \right) \times [\Phi_j^{-1/2} \hat{\mathbf{D}}_j(\mathbf{u}^{(0)})]^{\dagger} \Phi_j^{-1/2} \hat{\mathbf{c}}_j(\mathbf{u}^{(0)}) \quad (49)$$

接着将式(49)代回式(44)中的目标函数,并且结合式(46)可得仅关于目标位置向量 $\mathbf{u}^{(0)}$ 的约束优化问题,如式(50)所示:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{u}^{(0)}} \{ \hat{\mathbf{g}}_c(\mathbf{u}^{(0)}) \} = \min_{\mathbf{u}^{(0)}} \{ \|\hat{\mathbf{g}}_j(\mathbf{u}^{(0)})\|_2^2 \} \\ \text{s.t. } (\mathbf{u}^{(0)})^T \mathbf{A} \mathbf{u}^{(0)} = r_c^2 \end{cases} \quad (50)$$

其中,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{g}}_j(\mathbf{u}^{(0)}) &= \Phi_j^{-1/2} \hat{\mathbf{c}}_j(\mathbf{u}^{(0)}) - \Phi_j^{-1/2} \hat{\mathbf{D}}_j(\mathbf{u}^{(0)}) \dot{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)} \\ &= \Pi^{\perp} [\Phi_j^{-1/2} \hat{\mathbf{D}}_j(\mathbf{u}^{(0)})] \Phi_j^{-1/2} \hat{\mathbf{c}}_j(\mathbf{u}^{(0)}) \\ &+ \Phi_j^{-1/2} \hat{\mathbf{D}}_j(\mathbf{u}^{(0)}) \frac{[(\hat{\mathbf{D}}_j(\mathbf{u}^{(0)}))^T \Phi_j^{-1} \hat{\mathbf{D}}_j(\mathbf{u}^{(0)})]^{-1} \mathbf{A} \mathbf{u}^{(0)} (\mathbf{u}^{(0)})^T \mathbf{A}}{(\mathbf{u}^{(0)})^T \mathbf{A} [(\hat{\mathbf{D}}_j(\mathbf{u}^{(0)}))^T \Phi_j^{-1} \hat{\mathbf{D}}_j(\mathbf{u}^{(0)})]^{-1} \mathbf{A} \mathbf{u}^{(0)}} \\ &\times [(\hat{\mathbf{D}}_j(\mathbf{u}^{(0)}))^T \Phi_j^{-1} \hat{\mathbf{D}}_j(\mathbf{u}^{(0)})]^{-1} [\hat{\mathbf{D}}_j(\mathbf{u}^{(0)})]^T \Phi_j^{-1} \hat{\mathbf{c}}_j(\mathbf{u}^{(0)}) \end{aligned} \quad (51)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Pi^{\perp} [\Phi_j^{-1/2} \hat{\mathbf{D}}_j(\mathbf{u}^{(0)})] &= \mathbf{I}_{2MN} - \Phi_j^{-1/2} \hat{\mathbf{D}}_j(\mathbf{u}^{(0)}) \\ &\times [(\hat{\mathbf{D}}_j(\mathbf{u}^{(0)}))^T \Phi_j^{-1} \hat{\mathbf{D}}_j(\mathbf{u}^{(0)})]^{-1} [\hat{\mathbf{D}}_j(\mathbf{u}^{(0)})]^T \Phi_j^{-1/2} \end{aligned} \quad (52)$$

需要指出的是,由于速度向量 $\dot{\mathbf{u}}^{(0)}$ 已经不会在式(50)中出现了,此时无需再考虑式(44)中的第2个等式约束了.

(2) 优化算法

下面描述求解式(50)的优化算法. 首先构造关于式(50)的拉格朗日函数为

$$L_c(\mathbf{u}^{(0)}, \lambda_c) = \|\hat{\mathbf{g}}_j(\mathbf{u}^{(0)})\|_2^2 + \lambda_c [(\mathbf{u}^{(0)})^T \mathbf{A} \mathbf{u}^{(0)} - r_c^2] \quad (53)$$

式中 λ_c 表示拉格朗日乘子. 将向量 $\mathbf{u}^{(0)}$ 与标量 λ_c 的最优解分别记为 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)}$ 与 $\hat{\lambda}_{c, \text{dpe}}$, 则有

$$\left. \frac{\partial L_c(\mathbf{u}^{(0)}, \lambda_c)}{\partial \mathbf{u}^{(0)}} \right|_{\substack{\mathbf{u}^{(0)} = \hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)} \\ \lambda_c = \hat{\lambda}_{c, \text{dpe}}}} = \nabla \hat{\mathbf{g}}_c(\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)}) + 2\hat{\lambda}_{c, \text{dpe}} \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)} = \mathbf{0}_3 \quad (54)$$

$$\left. \frac{\partial L_c(\mathbf{u}^{(0)}, \lambda_c)}{\partial \lambda_c} \right|_{\substack{\mathbf{u}^{(0)} = \hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)} \\ \lambda_c = \hat{\lambda}_{c, \text{dpe}}}} = (\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)})^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)} - r_c^2 = 0 \quad (55)$$

其中, $\nabla \hat{\mathbf{g}}_c(\mathbf{u}^{(0)})$ 表示函数 $\hat{\mathbf{g}}_c(\mathbf{u}^{(0)})$ 的梯度向量,其表达式为

$$\nabla \hat{\mathbf{g}}_c(\mathbf{u}^{(0)}) = 2[\hat{\mathbf{G}}_j(\mathbf{u}^{(0)})]^T \hat{\mathbf{g}}_j(\mathbf{u}^{(0)}) \quad (56)$$

其中, $\hat{\mathbf{G}}_j(\mathbf{u}^{(0)}) = \frac{\partial \hat{\mathbf{g}}_j(\mathbf{u}^{(0)})}{\partial (\mathbf{u}^{(0)})^T}$ 表示向量函数 $\hat{\mathbf{g}}_j(\mathbf{u}^{(0)})$ 的 Jacobian 矩阵. 联合式(54)与式(55)即可得到关于向量 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)}$ 与标量 $\hat{\lambda}_{c, \text{dpe}}$ 的非线性方程组,不妨定义如下向量函数:

$$\hat{\mathbf{g}}_j(\mathbf{u}^{(0)}, \lambda_c) = \begin{bmatrix} \nabla \hat{\mathbf{g}}_c(\mathbf{u}^{(0)}) + 2\lambda_c \mathbf{A} \mathbf{u}^{(0)} \\ (\mathbf{u}^{(0)})^T \mathbf{A} \mathbf{u}^{(0)} - r_c^2 \end{bmatrix} \quad (57)$$

则该非线性方程组可以表示为 $\hat{\mathbf{g}}_j(\mathbf{u}^{(0)}, \lambda_c) = \mathbf{0}_4$, 求解式(50)等价于求解此非线性方程组.

为了获得二次收敛速度,本文采用牛顿算法求解非线性方程组 $\hat{\mathbf{g}}_j(\mathbf{u}^{(0)}, \lambda_c) = \mathbf{0}_4$, 其迭代公式如下:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{k+1}^{(0)} \\ \hat{\lambda}_{c, k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_k^{(0)} \\ \hat{\lambda}_{c, k} \end{bmatrix} - [\hat{\mathbf{G}}_j(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}, \hat{\lambda}_{c, k})]^{-1} \hat{\mathbf{g}}_j(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}, \hat{\lambda}_{c, k}) \quad (58)$$

式(58)中, $\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_k^{(0)} \\ \hat{\lambda}_{c, k} \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{k+1}^{(0)} \\ \hat{\lambda}_{c, k+1} \end{bmatrix}$ 分别表示第 k 次与第 $k+1$ 次迭代结果; 矩阵 $\hat{\mathbf{G}}_j(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}, \hat{\lambda}_{c, k})$ 的表达式为

$$\hat{\mathbf{G}}_j(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}, \hat{\lambda}_{c, k}) = \begin{bmatrix} \nabla^2 \hat{\mathbf{g}}_c(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}) + 2\hat{\lambda}_{c, k} \mathbf{A} & 2\mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_k^{(0)} \\ 2(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)})^T \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \quad (59)$$

其中, $\nabla^2 \hat{\mathbf{g}}_c(\mathbf{u}^{(0)})$ 表示函数 $\hat{\mathbf{g}}_c(\mathbf{u}^{(0)})$ 的 Hessian 矩阵, 基于式(56)可以得到其表达式为

$$\begin{aligned} \nabla^2 \hat{\mathbf{g}}_c(\mathbf{u}^{(0)}) &= 2[\hat{\mathbf{G}}_j(\mathbf{u}^{(0)})]^T \hat{\mathbf{G}}_j(\mathbf{u}^{(0)}) \\ &+ 2[\hat{\mathbf{g}}_j(\mathbf{u}^{(0)}) \otimes \mathbf{I}_3] \frac{\partial \text{vec}[(\hat{\mathbf{G}}_j(\mathbf{u}^{(0)}))^T]}{\partial (\mathbf{u}^{(0)})^T} \end{aligned} \quad (60)$$

为了进一步简化计算,下面结合式(57)~(59)推导迭代值 $\hat{\mathbf{u}}_{k+1}^{(0)}$ 与 $\hat{\lambda}_{c, k+1}$ 各自的表达式. 首先将式(57)与式(59)代入式(58)中可知

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \nabla^2 \hat{g}_c(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}) + 2\hat{\lambda}_{c,k} \mathbf{A} & 2\mathbf{A}\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)} \\ 2(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)})^T \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{k+1}^{(0)} - \hat{\mathbf{u}}_k^{(0)} \\ \hat{\lambda}_{c,k+1} - \hat{\lambda}_{c,k} \end{bmatrix} \\ & = - \begin{bmatrix} \nabla \hat{g}_c(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}) + 2\hat{\lambda}_{c,k} \mathbf{A}\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)} \\ (\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)})^T \mathbf{A}\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)} - r_c^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (61)$$

由式(61)可以进一步推得

$$\nabla^2 \hat{g}_c(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}) + 2\hat{\lambda}_{c,k} \mathbf{A}\hat{\mathbf{u}}_{k+1}^{(0)} - \hat{\mathbf{u}}_k^{(0)} + 2\hat{\lambda}_{c,k+1} \mathbf{A}\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)} = -\nabla \hat{g}_c(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}) \quad (62)$$

$$(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)})^T \mathbf{A}(\hat{\mathbf{u}}_{k+1}^{(0)} - \hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}) = \frac{1}{2} [r_c^2 - (\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)})^T \mathbf{A}\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}] \quad (63)$$

将式(62)两边同时乘以向量 $(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)})^T \mathbf{A}[\nabla^2 \hat{g}_c(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}) + 2\hat{\lambda}_{c,k} \mathbf{A}]^{-1}$ 可知

$$\begin{aligned} & (\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)})^T \mathbf{A}(\hat{\mathbf{u}}_{k+1}^{(0)} - \hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}) + 2\hat{\lambda}_{c,k+1} (\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)})^T \mathbf{A}[\nabla^2 \hat{g}_c(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}) + 2\hat{\lambda}_{c,k} \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)} \\ & = -(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)})^T \mathbf{A}[\nabla^2 \hat{g}_c(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}) + 2\hat{\lambda}_{c,k} \mathbf{A}]^{-1} \nabla \hat{g}_c(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}) \end{aligned} \quad (64)$$

接着将式(63)代入式(64)中可得

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{c,k+1} & = \frac{(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)})^T \mathbf{A}\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)} - r_c^2}{4(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)})^T \mathbf{A}[\nabla^2 \hat{g}_c(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}) + 2\hat{\lambda}_{c,k} \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}} \\ & \quad - \frac{2(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)})^T \mathbf{A}[\nabla^2 \hat{g}_c(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}) + 2\hat{\lambda}_{c,k} \mathbf{A}]^{-1} \nabla \hat{g}_c(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)})}{4(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)})^T \mathbf{A}[\nabla^2 \hat{g}_c(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}) + 2\hat{\lambda}_{c,k} \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}} \end{aligned} \quad (65)$$

而由式(62)可知

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_{k+1}^{(0)} & = \hat{\mathbf{u}}_k^{(0)} - [\nabla^2 \hat{g}_c(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}) + 2\hat{\lambda}_{c,k} \mathbf{A}]^{-1} \\ & \quad \times [\nabla \hat{g}_c(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}) + 2\hat{\lambda}_{c,k+1} \mathbf{A}\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}] \end{aligned} \quad (66)$$

$$\lim_{\xi_j \rightarrow 0_{2MN}} \hat{g}_j(\mathbf{u}^{(0)}) = \lim_{\xi_j \rightarrow 0_{2MN}} \Pi^{1/2} [\Phi_j^{-1/2} \hat{D}_j(\mathbf{u}^{(0)}) \Phi_j^{-1/2} \hat{c}_j(\mathbf{u}^{(0)}) + \lim_{\xi_j \rightarrow 0_{2MN}} \Phi_j^{1/2} \hat{D}_j(\mathbf{u}^{(0)}) \frac{[(\hat{D}_j(\mathbf{u}^{(0)})^T \Phi_j^{-1} \hat{D}_j(\mathbf{u}^{(0)})]^{-1} \mathbf{A} \mathbf{u}^{(0)} (\mathbf{u}^{(0)})^T \mathbf{A} \mathbf{u}^{(0)}}{(\mathbf{u}^{(0)})^T \mathbf{A} [(\hat{D}_j(\mathbf{u}^{(0)})^T \Phi_j^{-1} \hat{D}_j(\mathbf{u}^{(0)})]^{-1} \mathbf{A} \mathbf{u}^{(0)}}] = \mathbf{0}_{2MN} \quad (68)$$

式(68)中第2个极限等于零利用了式(44)中的第2个等式约束. 因此,在迭代初始值 $\hat{\mathbf{u}}_0^{(0)}$ 设置合理的情形下,式(60)中的右边第2项相比于右边第1项可以近似忽略,因此可以将 Hessian 矩阵 $\nabla^2 \hat{g}_c(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)})$ 近似表示为 $\nabla^2 \hat{g}_c(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}) \approx 2[\hat{G}_j(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)})]^T \hat{G}_j(\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)})$.

5 新方法的理论性能分析

本节将对定位新方法进行理论性能分析,首先证明解耦优化算法所得到的估计值 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)} \\ \hat{\lambda}_{\text{dpe}}^{(0)} \end{bmatrix}$ 是原始优化问题式(44)的最优解,然后推导估计值 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)}$ 的估计 MSE,并将其与第3节给出的 CRB 进行定量比较,用于验证新方法的渐近统计有效性.

5.1 新方法的最优性分析

由上述解耦优化算法所得到的估计值 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)}$ 是优化问题式(44)的最优解,具体可见如下结论.

定理 1 若将含有双重等式约束的优化问题式(44)的最优解记为 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(0)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(0)} \\ \hat{\lambda}_{\text{opt}}^{(0)} \end{bmatrix}$, 则有 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(0)} = \hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)}$ 与 $\hat{\lambda}_{\text{opt}}^{(0)} = \hat{\lambda}_{\text{dpe}}^{(0)}$.

式(65)与式(66)即为求解式(50)的牛顿迭代公式,其收敛值 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}$ 就是最终的目标位置向量估计值. 最后将目标位置向量估计值 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)}$ 代入式(49)中即可得到目标速度向量估计值,如式(67)所示:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)} & = \left(\mathbf{I}_3 - \frac{[(\hat{D}_j(\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)}))^T \Phi_j^{-1} \hat{D}_j(\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)})]^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)} (\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)})^T \mathbf{A}}{(\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)})^T \mathbf{A} [(\hat{D}_j(\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)}))^T \Phi_j^{-1} \hat{D}_j(\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)})]^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)}} \right) \\ & \quad \times [(\hat{D}_j(\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)}))^T \Phi_j^{-1} \hat{D}_j(\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)})]^{-1} [\hat{D}_j(\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)})]^T \Phi_j^{-1} \hat{c}_j(\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpe}}^{(0)}) \end{aligned} \quad (67)$$

关于文中提出的定位新方法有如下两点说明:

注释 2 尽管优化模型式(44)与文献[17]中的优化模型式(5)以及文献[18]中的优化模型式(13)具有类似的结构,但是本文的新方法与它们之间存在两点显著差异:(1)文献[17]与文献[18]中的定位方法均属于辐射源定位体制,而新方法属于无源雷达定位体制,其用于对无线静默目标进行定位;(2)文献[17]与文献[18]中的定位方法均属于闭式解型方法,而新方法则属于迭代型方法,其独特之处在于实现了目标位置与速度的解耦优化,在保留迭代型方法具有较高误差阈值特点的同时,又降低了出现迭代发散与局部收敛的风险.

注释 3 由式(51)可知

$$\lim_{\xi_j \rightarrow 0_{2MN}} \hat{g}_j(\mathbf{u}^{(0)}) = \lim_{\xi_j \rightarrow 0_{2MN}} \Pi^{1/2} [\Phi_j^{-1/2} \hat{D}_j(\mathbf{u}^{(0)}) \Phi_j^{-1/2} \hat{c}_j(\mathbf{u}^{(0)}) + \lim_{\xi_j \rightarrow 0_{2MN}} \Phi_j^{1/2} \hat{D}_j(\mathbf{u}^{(0)}) \frac{[(\hat{D}_j(\mathbf{u}^{(0)})^T \Phi_j^{-1} \hat{D}_j(\mathbf{u}^{(0)})]^{-1} \mathbf{A} \mathbf{u}^{(0)} (\mathbf{u}^{(0)})^T \mathbf{A} \mathbf{u}^{(0)}}{(\mathbf{u}^{(0)})^T \mathbf{A} [(\hat{D}_j(\mathbf{u}^{(0)})^T \Phi_j^{-1} \hat{D}_j(\mathbf{u}^{(0)})]^{-1} \mathbf{A} \mathbf{u}^{(0)}}] = \mathbf{0}_{2MN} \quad (68)$$

证明 首先基于式(46)可知

$$\begin{aligned} \hat{g}_a(\mathbf{u}^{(0)}, \dot{\mathbf{u}}^{(0)}) & = [\hat{c}_j(\mathbf{u}^{(0)}) - \hat{D}_j(\mathbf{u}^{(0)}) \dot{\mathbf{u}}^{(0)}]^T \Phi_j^{-1} \\ & \quad \times [\hat{c}_j(\mathbf{u}^{(0)}) - \hat{D}_j(\mathbf{u}^{(0)}) \dot{\mathbf{u}}^{(0)}] \end{aligned} \quad (69)$$

于是关于优化问题式(44)的拉格朗日函数可以表示为

$$\begin{aligned} L_a(\mathbf{u}^{(0)}, \dot{\mathbf{u}}^{(0)}, \lambda_{a1}, \lambda_{a2}) & = [\hat{c}_j(\mathbf{u}^{(0)}) - \hat{D}_j(\mathbf{u}^{(0)}) \dot{\mathbf{u}}^{(0)}]^T \Phi_j^{-1} [\hat{c}_j(\mathbf{u}^{(0)}) - \hat{D}_j(\mathbf{u}^{(0)}) \dot{\mathbf{u}}^{(0)}] \\ & \quad + \lambda_{a1} [(\mathbf{u}^{(0)})^T \mathbf{A} \mathbf{u}^{(0)} - r_c^2] + \lambda_{a2} (\dot{\mathbf{u}}^{(0)})^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{u}}^{(0)} \end{aligned} \quad (70)$$

其中, λ_{a1} 与 λ_{a2} 分别表示拉格朗日乘子,若将它们的最优解分别记为 $\hat{\lambda}_{a1, \text{opt}}$ 与 $\hat{\lambda}_{a2, \text{opt}}$, 则有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial L_a(\mathbf{u}^{(0)}, \dot{\mathbf{u}}^{(0)}, \lambda_{a1}, \lambda_{a2})}{\partial \mathbf{u}^{(0)}} \Big|_{\substack{\mathbf{u}^{(0)} = \hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(0)} \\ \dot{\mathbf{u}}^{(0)} = \hat{\dot{\mathbf{u}}}_{\text{opt}}^{(0)} \\ \lambda_{a1} = \hat{\lambda}_{a1, \text{opt}} \\ \lambda_{a2} = \hat{\lambda}_{a2, \text{opt}}}} \\ & = 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial (\mathbf{u}^{(0)})^T} \Big|_{\substack{\mathbf{u}^{(0)} = \hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(0)} \\ \dot{\mathbf{u}}^{(0)} = \hat{\dot{\mathbf{u}}}_{\text{opt}}^{(0)}}} \right)^T \hat{\mathbf{A}}_J^T \Phi_J^{-1} (\hat{\mathbf{A}}_J \hat{\theta}_{\text{opt}} - \hat{\mathbf{b}}_J) \\ & \quad + 2\hat{\lambda}_{a1, \text{opt}} \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(0)} + \hat{\lambda}_{a2, \text{opt}} \mathbf{A} \hat{\dot{\mathbf{u}}}_{\text{opt}}^{(0)} = \mathbf{0}_3 \end{aligned} \quad (71)$$

$$\frac{\partial L_a(\mathbf{u}^{(t)}, \dot{\mathbf{u}}^{(t)}, \lambda_{a1}, \lambda_{a2})}{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(t)}} \Big|_{\substack{\mathbf{u}^{(t)} = \hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)} \\ \dot{\mathbf{u}}^{(t)} = \hat{\dot{\mathbf{u}}}_{\text{opt}}^{(t)} \\ \lambda_{a1} = \hat{\lambda}_{a1, \text{opt}} \\ \lambda_{a2} = \hat{\lambda}_{a2, \text{opt}}}} = 2[\hat{D}_J(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)})]^T \Phi_J^{-1} [\hat{D}_J(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)}) \hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)} - \hat{c}_J(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)})] + \hat{\lambda}_{a2, \text{opt}} \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)} = \mathbf{0}_3 \quad (72)$$

$$\frac{\partial L_a(\mathbf{u}^{(t)}, \dot{\mathbf{u}}^{(t)}, \lambda_{a1}, \lambda_{a2})}{\partial \lambda_{a1}} \Big|_{\substack{\mathbf{u}^{(t)} = \hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)} \\ \dot{\mathbf{u}}^{(t)} = \hat{\dot{\mathbf{u}}}_{\text{opt}}^{(t)} \\ \lambda_{a1} = \hat{\lambda}_{a1, \text{opt}} \\ \lambda_{a2} = \hat{\lambda}_{a2, \text{opt}}}} = (\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)})^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)} - r_c^2 = 0 \quad (73)$$

$$\frac{\partial L_a(\mathbf{u}^{(t)}, \dot{\mathbf{u}}^{(t)}, \lambda_{a1}, \lambda_{a2})}{\partial \lambda_{a2}} \Big|_{\substack{\mathbf{u}^{(t)} = \hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)} \\ \dot{\mathbf{u}}^{(t)} = \hat{\dot{\mathbf{u}}}_{\text{opt}}^{(t)} \\ \lambda_{a1} = \hat{\lambda}_{a1, \text{opt}} \\ \lambda_{a2} = \hat{\lambda}_{a2, \text{opt}}}} = (\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)})^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)} = 0 \quad (74)$$

其中,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{opt}} = \begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)})^T & \|\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)}\|_2 & (\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)})^T \frac{(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)})^T (\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)} - \dot{\mathbf{u}}_1^{(t)})}{\|\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)}\|_2} \end{bmatrix}^T$$

由式(72)可得

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)} = [(\hat{D}_J(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)}))^T \Phi_J^{-1} \hat{D}_J(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)})]^{-1} \times \left([\hat{D}_J(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)})]^T \Phi_J^{-1} \hat{c}_J(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)}) - \frac{\hat{\lambda}_{a2, \text{opt}}}{2} \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)} \right) \quad (75)$$

将式(75)代入式(74)中可知

$$\hat{\lambda}_{a2, \text{opt}} = \frac{2(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)})^T \mathbf{A} [(\hat{D}_J(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)}))^T \Phi_J^{-1} \hat{D}_J(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)})]^{-1}}{(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)})^T \mathbf{A} [(\hat{D}_J(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)}))^T \Phi_J^{-1} \hat{D}_J(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)})]^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)}} \times [\hat{D}_J(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)})]^T \Phi_J^{-1} \hat{c}_J(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)}) \quad (76)$$

$$\begin{cases} \min_{\Delta \tilde{\mathbf{u}}^{(t)}} \{ \Delta g_a(\Delta \tilde{\mathbf{u}}^{(t)}) \} = \min_{\Delta \tilde{\mathbf{u}}^{(t)}} \left\{ \left(\boldsymbol{\psi}_J - \mathbf{A}_J \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial (\tilde{\mathbf{u}}^{(t)})^T} \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{(t)} \right)^T \Phi_J^{-1} \left(\boldsymbol{\psi}_J - \mathbf{A}_J \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial (\tilde{\mathbf{u}}^{(t)})^T} \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{(t)} \right) \right\} \\ \text{s.t. } H(\tilde{\mathbf{u}}^{(t)}) \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{(t)} = \mathbf{0}_2 \end{cases} \quad (80)$$

式(80)的最优闭式解为

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}}_{\text{dpc}}^{(t)} \doteq (\mathbf{I}_3 - \mathbf{Z}_J^{-1} [H(\tilde{\mathbf{u}}^{(t)})]^T [H(\tilde{\mathbf{u}}^{(t)}) \mathbf{Z}_J^{-1} (H(\tilde{\mathbf{u}}^{(t)})]^T]^{-1} H(\tilde{\mathbf{u}}^{(t)})) \times \mathbf{Z}_J^{-1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial (\tilde{\mathbf{u}}^{(t)})^T} \right)^T \mathbf{A}_J^T \Phi_J^{-1} \boldsymbol{\psi}_J \quad (81)$$

其中,

$$\mathbf{Z}_J = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial (\tilde{\mathbf{u}}^{(t)})^T} \right)^T \mathbf{A}_J^T \Phi_J^{-1} \mathbf{A}_J \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial (\tilde{\mathbf{u}}^{(t)})^T} \quad (82)$$

其中,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial (\tilde{\mathbf{u}}^{(t)})^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ (\boldsymbol{\rho}_1^{(t)})^T & \mathbf{0}_3^T \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 \\ (\Pi^\perp [\boldsymbol{\rho}_1^{(t)} \boldsymbol{\eta}_1^{(t)}]^T & (\boldsymbol{\rho}_1^{(t)})^T \end{bmatrix} \quad (83)$$

由式(81)可知,估计误差向量 $\Delta \tilde{\mathbf{u}}_{\text{dpc}}^{(t)}$ 渐近服从零均

接着将式(76)代入式(75)中可得

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)} = \left(\mathbf{I}_3 - \frac{[(\hat{D}_J(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)}))^T \Phi_J^{-1} \hat{D}_J(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)})]^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)} (\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)})^T \mathbf{A}}{(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)})^T \mathbf{A} [(\hat{D}_J(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)}))^T \Phi_J^{-1} \hat{D}_J(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)})]^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)}} \right) \times [(\hat{D}_J(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)}))^T \Phi_J^{-1} \hat{D}_J(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)})]^{-1} [\hat{D}_J(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)})]^T \Phi_J^{-1} \hat{c}_J(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)}) \quad (77)$$

另一方面,我们可以得到如下重要关系式:

$$\frac{\partial \hat{g}_a(\mathbf{u}^{(t)}, \dot{\mathbf{u}}^{(t)})}{\partial \mathbf{u}^{(t)}} \Big|_{\substack{\mathbf{u}^{(t)} = \hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)} + \hat{\lambda}_{a2, \text{opt}} \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)} \\ \dot{\mathbf{u}}^{(t)} = \hat{\dot{\mathbf{u}}}_{\text{opt}}^{(t)}}} = 2[\hat{G}_J(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)})]^T \hat{g}_J(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)}) \quad (78)$$

然后将式(78)代入式(71)中可知

$$\nabla \hat{g}_c(\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)}) + 2\hat{\lambda}_{a1, \text{opt}} \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)} = \mathbf{0}_3 \quad (79)$$

分别对比式(79)与式(54)以及式(73)与式(55)可得 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)} = \hat{\mathbf{u}}_{\text{dpc}}^{(t)}$ 与 $\hat{\lambda}_{a1, \text{opt}} = \hat{\lambda}_{c, \text{dpc}}$, 最后再对比式(77)与式(67)可知 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{opt}}^{(t)} = \hat{\mathbf{u}}_{\text{dpc}}^{(t)}$. 证毕.

5.2 新方法的估计均方误差分析

由于估计值 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpc}}^{(t)}$ 是优化问题式(44)的最优解,因而可以直接基于式(44)推导新方法的估计 MSE. 不妨将估计值 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpc}}^{(t)}$ 的估计误差记为 $\Delta \tilde{\mathbf{u}}_{\text{dpc}}^{(t)} = \hat{\mathbf{u}}_{\text{dpc}}^{(t)} - \tilde{\mathbf{u}}^{(t)} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{\text{dpc}}^{(t)} \\ \Delta \dot{\mathbf{u}}_{\text{dpc}}^{(t)} \end{bmatrix}$ (其中 $\Delta \mathbf{u}_{\text{dpc}}^{(t)} = \hat{\mathbf{u}}_{\text{dpc}}^{(t)} - \mathbf{u}^{(t)}$ 与 $\Delta \dot{\mathbf{u}}_{\text{dpc}}^{(t)} = \hat{\dot{\mathbf{u}}}_{\text{dpc}}^{(t)} - \dot{\mathbf{u}}^{(t)}$), 由一阶误差分析原理可知,估计误差 $\Delta \tilde{\mathbf{u}}_{\text{dpc}}^{(t)}$ 应为如式(80)约束优化问题的最优解.

值高斯分布,并且估计值 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpc}}^{(t)}$ 的估计 MSE 矩阵为

$$\text{MSE}(\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpc}}^{(t)}) \doteq \mathbf{Z}_J^{-1} - \mathbf{Z}_J^{-1} [H(\tilde{\mathbf{u}}^{(t)})]^T [H(\tilde{\mathbf{u}}^{(t)}) \mathbf{Z}_J^{-1} (H(\tilde{\mathbf{u}}^{(t)})]^T]^{-1} H(\tilde{\mathbf{u}}^{(t)}) \mathbf{Z}_J^{-1} \quad (84)$$

5.3 新方法的渐近统计有效性分析

通过进一步的数学分析可知,估计值 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpc}}^{(t)}$ 具有渐近统计有效性,具体可见如下结论.

定理 2 在一阶误差分析理论框架下满足 $\text{MSE}(\hat{\mathbf{u}}_{\text{dpc}}^{(t)}) = \text{CRB}^{(c)}(\tilde{\mathbf{u}}^{(t)})$.

证明 对比式(15)与式(84)可知,下面仅需要证明等式 $\text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(t)}) = \mathbf{Z}_J^{-1}$ 或者 $[\text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(t)})]^{-1} = \mathbf{Z}_J$ 成立即可.

首先将定义式 $\tilde{\mathbf{d}}_n = f_n(\tilde{\mathbf{u}}^{(t)})$ 代入伪线性观测方程式(30)中可以获得关于向量 $\tilde{\mathbf{u}}^{(t)}$ 的恒等式,将该恒等式两边对向量 $\tilde{\mathbf{u}}^{(t)}$ 求导可得如下重要关系式:

$$W_n F_n(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) = A_n \frac{\partial \theta}{\partial (\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})^T}, 1 \leq n \leq N \quad (85)$$

然后将式(85)中的 N 个等式进行合并可得

$$W_J F_J(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) = A_J \frac{\partial \theta}{\partial (\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})^T} \quad (86)$$

最后将式(43)与式(86)代入式(82)中,并且结合式(10)可知

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_J &= [F_J(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})]^T \mathbf{W}_J^T \Phi_J^{-1} \mathbf{W}_J F_J(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) \\ &= [F_J(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})]^T \Sigma_J^{-1} F_J(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}) = [\text{CRB}(\tilde{\mathbf{u}}^{(0)})]^{-1} \end{aligned} \quad (87)$$

证毕.

表 1 星载外辐射源与近空接收平台的经度/纬度/高度/速度的数值

星载外辐射源序号	1	2	3	4	近空接收平台序号	1	2	3	4
(东)经度/(°)	100	101	101.3	100.5	(东)经度/(°)	114	113	114.2	113.7
(北)纬度/(°)	30	31	31.5	30.9	(北)纬度/(°)	32	33	32.5	33.2
高度/km	700	700	700	700	高度/km	80	80	80	80
X轴速度/(km/s)	-4.890 2	-4.821 6	-4.797 7	-4.851 4	X轴速度/(km/s)	0.005 0	0.015 0	0.003 3	0.019 5
Y轴速度/(km/s)	-3.146 7	-3.298 0	-3.356 1	-3.249 2	Y轴速度/(km/s)	0.017 2	0.005 5	0.002 6	0.003 2
Z轴速度/(km/s)	3.896 7	3.856 8	3.836 5	3.860 9	Z轴速度/(km/s)	-0.021 2	-0.022 7	-0.027 5	-0.019 6

6.1 仿真实验 1

将标准差设为 $\sigma=5$ km. 下面利用文中新方法对运动目标进行定位,并且进行2 000次蒙特卡罗实验,图2描绘了ECEF坐标系下的定位结果散点图与定位误差椭圆曲线,图中的3条椭圆曲线分别对应概率0.55、0.75以及0.95. 另一方面,由于文中新方法需要对目标位置向量进行迭代,为了展示该方法的收敛速度,图3描绘了ECEF坐标系下的X轴坐标的迭代收敛曲线,图中随机选取了10次蒙特卡罗实验的迭代收敛曲线.

从图2中不难看出,文中新方法的定位结果散点图的形状与定位误差椭圆的形状相近,并且低概率对应小面积椭圆,高概率对应大面积椭圆,从而验证了该方法的有效性. 从图3中不难看出,文中新方法具有很快的收敛速度,一般在3~6次迭代以内即可收敛,这主要得益于牛顿算法的二次收敛特性.

6.2 仿真实验 2

下面将文中新方法的估计精度与其它定位方法的估计精度进行比较,所参考的方法包括文献[13]中的约束泰勒级数迭代定位方法、文献[17]与文献[19]中的闭式定位方法(即改进型TSWLS定位方法). 需要指出的是,除了文献[19]以外,其余文献中的定位场景与本文并不一致,但是可以对其中的定位方法进行修正与推广,使其能与本文的定位场景相匹配. 此外,约束泰勒级数迭代定位方法不仅需要目标位置向量的初始值,还需要目标速度

6 仿真实验

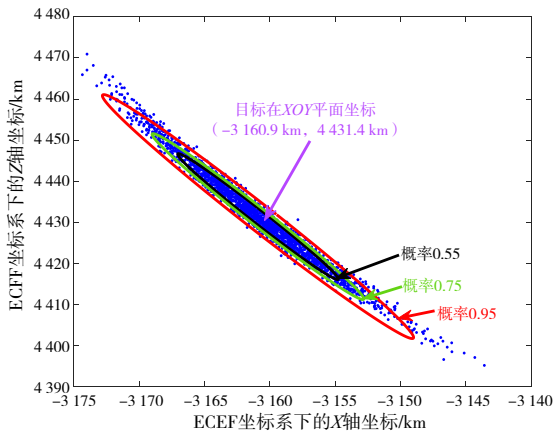
本节中的基础实验参数如下:假设利用4个星载外辐射源(即 $M=4$)与4个近空接收平台(即 $N=4$)对地面运动目标进行定位,它们的经度/纬度/高度/速度的数值如表1所示,其中4颗卫星的参数完全参照文献[15]中的设置,均为低轨卫星,速度绝对大小为7 km/s,4个近空接收平台的绝对速度大小为0.027 8 km/s,每个接收机获得的距离和距离和变化率观测误差向量均服从均值为零、协方差矩阵为 $\Sigma_n = \text{blkdiag}\{\sigma^2 \mathbf{I}_M, (10^{-2}\sigma)^2 \mathbf{I}_M\}$ 的高斯分布,其中 σ 为标准差. 运动目标位于地球表面,其经度为东经125.5°,纬度为北纬31.5°,速度向量为 $\dot{\mathbf{u}}^{(0)} = [0.014 4 \ 0.005 3 \ 0.006 6]^T$ km/s,速度绝对大小为0.016 7 km/s.

向量的初始值,这里给出目标速度向量的初始值无误差和含有随机误差两种情形,其中后者是首先获得含有随机误差的目标位置向量,然后再解算出目标速度向量. 将标准差 σ 从1 km变化至20 km,图4给出了目标位置估计均方根误差随着标准差 σ 的变化曲线. 此外,图4中还包含了由式(15)给出的CRB曲线.

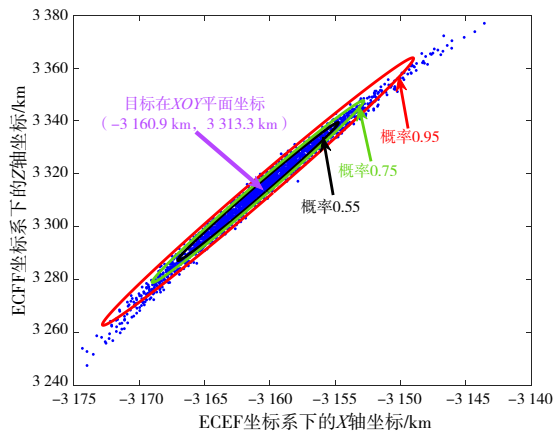
从图4中可以看出:(1)相比两种闭式定位方法,文中新方法在大观测误差条件下具有更高的估计精度与误差阈值;(2)相比目标速度的初始值含随机误差的约束泰勒级数迭代定位方法,文中新方法在大观测误差条件下具有更高的估计精度,这是因为虽然两种方法均属迭代型方法,但是文中新方法仅需目标位置向量参与迭代,无需目标速度向量初始值,而约束泰勒级数迭代定位方法则需要全部未知参数参与迭代,因此其受初始误差的影响更大;(3)文中新方法的估计性能始终能够逼近由式(15)给出的CRB,从而说明该方法在大观测误差条件下的鲁棒性,同时也验证了第5节理论性能分析的有效性.

6.3 仿真实验 3

由于文中新方法考虑了目标速度的约束,下面通过仿真实验说明增加此约束对定位性能带来的影响. 由于文献[14]中的约束最大似然定位方法仅考虑单个等式约束式(2),因此可以将文中新方法的定位精度与约束最大似然定位方法进行比较,用于说明目标速度



(a) ECEF 坐标系下的 XOY 坐标平面



(b) ECEF 坐标系下的 XOZ 坐标平面

图 2 两个运动辐射源的定位结果散点图与定位误差椭圆曲线

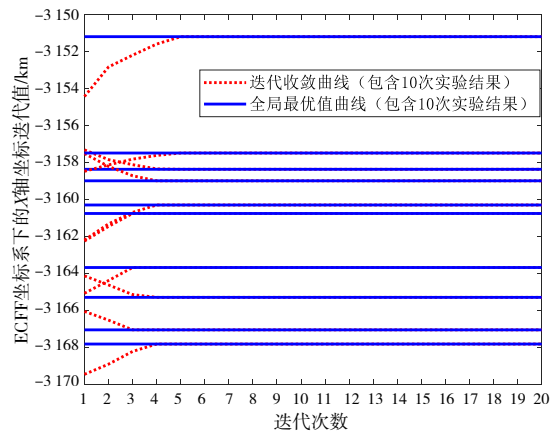


图 3 ECEF 坐标系下的 X 轴坐标收敛曲线

约束式(3)所产生的性能增益. 将标准差设为 $\sigma=5$ km, 首先将目标纬度固定为北纬 31.5° , 并改变目标经度, 图5与图6分别给出了目标位置与速度估计均方根误差随着目标经度的变化曲线; 然后将目标经度固定为东

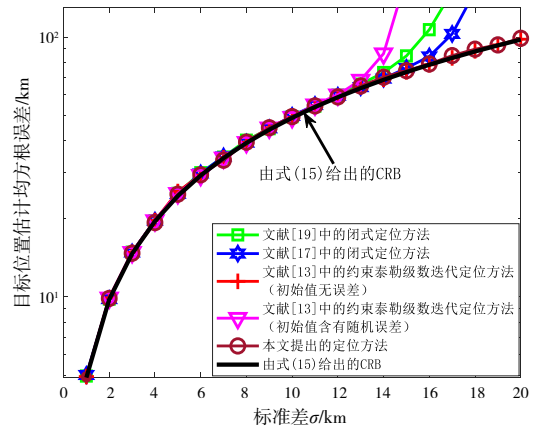


图 4 目标位置估计均方根误差随着标准差 σ 的变化曲线

经 125.5° , 并改变目标纬度, 图7与图8分别给出了目标位置与速度估计均方根误差随着目标纬度的变化曲线. 此外, 图5~8中还包含了由文献[14]给出的CRB曲线和由式(15)给出的CRB曲线, 其中前者仅含有单个等式约束, 后者含有双重等式约束.

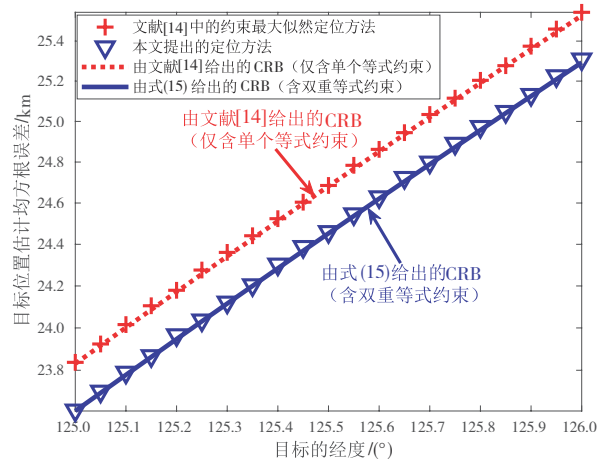


图 5 目标位置估计均方根误差随着目标经度的变化曲线

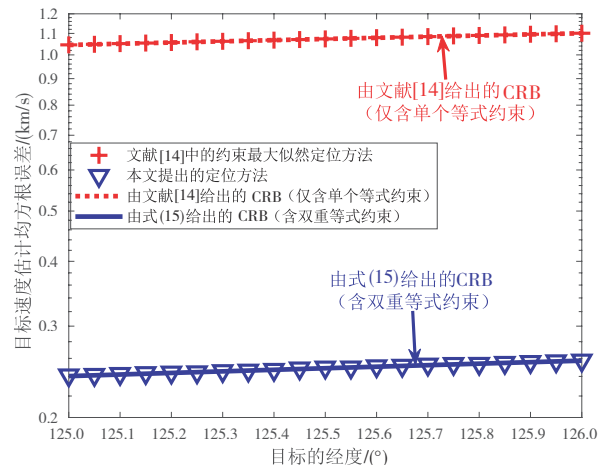


图 6 目标速度估计均方根误差随着目标经度的变化曲线

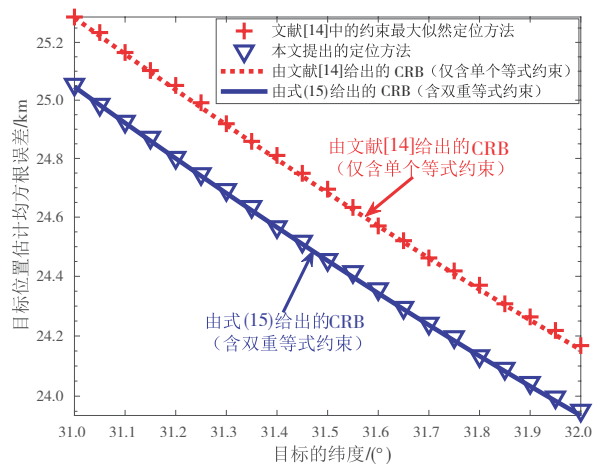


图7 目标位置估计均方根误差随着目标纬度的变化曲线

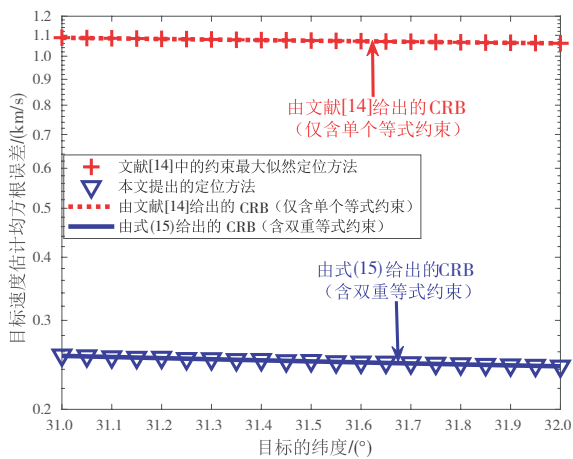


图8 目标速度估计均方根误差随着目标纬度的变化曲线

从图5~8中可以看出:(1)利用关于目标速度的约束式(3)能够同时提高目标位置与速度的估计精度,只是相比较而言,目标速度估计精度的改善幅度更大,这是因为式(3)是关于目标速度的唯一约束,其对于提高目标速度的估计精度至关重要;(2)尽管目标经纬度发生了变化,文中新方法的定位精度始终可以逼近由式(15)给出的CRB,从而说明了该方法的渐近统计有效性是具有一定泛化性的,并且再次验证了第5节理论性能分析的有效性。

7 结论

针对位于地球表面的无线静默目标,本文提出了一种基于外辐射源雷达系统的运动目标定位新方法.新方法基于拉格朗日乘法实现了目标位置向量与速度向量的解耦估计.此外,文中还在双重二次等式约束条件下推导了基于外辐射源雷达系统的运动目标定位的CRB,并且结合一阶误差分析与拉格朗日乘法证明了新方法的渐近统计有效性.最后,文中通过仿真实验验证了新方法的有效性和优越性.需要指出的是,

本文的研究尚未考虑外辐射源以及接收机位置与速度先验观测误差的影响,这也将是后续要研究的重点问题。

参考文献

- [1] JIANG H Z, ZHAO C, ZHAO Y J. Coherent integration algorithm for frequency-agile and PRF-jittering signals in passive localization[J]. Chinese Journal of Electronics, 2021, 30(4): 781-792.
- [2] ZHAO L J, SU C H, DAI Z Y, et al. Indoor device-free passive localization with DCNN for location-based services [J]. The Journal of Supercomputing, 2020, 76(11): 8432-8449.
- [3] ALAMU O, IYAOMOLERE B, ABDULRAHMAN A. An overview of massive MIMO localization techniques in wireless cellular networks: Recent advances and outlook [J]. Ad Hoc Networks, 2021, 111(1): 102353.
- [4] LU J X, LIU F F, SUN J Y, et al. Multi-target localization of MIMO radar with widely separated antennas on moving platforms based on expectation maximization algorithm[J]. Remote Sensing, 2022, 14(7): 1670.
- [5] LIANG J L, HUAN M S, DENG X B, et al. Optimal transmitter and receiver placement for localizing 2D interested-region target with constrained sensor regions[J]. Signal Processing, 2021, 183(5): 108032.
- [6] SHU K, YI J X, WAN X R, et al. A hybrid tracking algorithm for multistatic passive radar[J]. IEEE Systems Journal, 2021, 15(2): 2024-2034.
- [7] MA H, ANTONIOU M, PASTINA D, et al. Maritime moving target indication using passive GNSS-based bistatic radar[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2018, 54(1): 115-130.
- [8] 蒋铁珍, 肖文书, 李大圣, 等. 基于星载机会源的空间目标外辐射源雷达探测技术可行性研究[J]. 雷达学报, 2014, 3(6): 711-719.
JIANG T Z, XIAO W S, LI D S, et al. Feasibility study on passive-radar detection of space targets using spaceborne illuminators of opportunity[J]. Journal of Radars, 2014, 3(6): 711-719. (in Chinese)
- [9] STEIN S. Algorithms for ambiguity function processing [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1981, 29(3): 588-599.
- [10] 王堃, 吴嗣亮, 田静. 伽利略搜救信号关键参数估计的克拉美罗界[J]. 电子学报, 2011, 39(12): 2761-2767.
WANG K, WU S L, TIAN J. Cramer-Rao bounds of key parameters estimation for Galileo SAR signal[J]. Acta

Electronica Sinica, 2011, 39(12): 2761-2767. (in Chinese)

- [11] SHU F, YANG S P, LU J H, et al. On impact of earth constraint on TDOA-based localization performance in passive multisatellite localization systems[J]. IEEE Systems Journal, 2018, 12(4): 3861-3864.
- [12] MASON J. Algebraic two-satellite TOA/FOA position solution on an ellipsoidal earth[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2004, 40(3): 1087-1092.
- [13] 王鼎. 卫星位置误差条件下基于约束 Taylor 级数迭代的地面目标定位理论性能分析[J]. 中国科学: 信息科学, 2014, 44(2): 231-253.
WANG D. The geolocation performance analysis for the constrained Taylor-series iteration in the presence of satellite orbit perturbations[J]. Scientia Sinica Informationis, 2014, 44(2): 231-253. (in Chinese)
- [14] CAO Y L, LI P, LI J Z, et al. A new iterative algorithm for geolocating a known altitude target using TDOA and FDOA measurements in the presence of satellite location uncertainty[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2015, 28(5): 1510-1518.
- [15] LI X, GUO F C, YANG L, et al. Improved solution for geolocating a known altitude source using TDOA and FDOA under random sensor location errors[J]. Electronics Letters, 2018, 54(9): 597-599.
- [16] MA F H, LIU Z M, YANG L, et al. Altitude constrained source localization using TDOA, FDOA and differential Doppler rate[J]. Digital Signal Processing, 2022, 123(4): 103385.
- [17] PEI Y H, WU G Z, GUO F C. Geolocation a known-altitude moving source by TDOA and FDOA measurements [J]. Electronics Letters, 2022, 58(13): 514-516.
- [18] PEI Y H, LI X, GUO F C. Geolocation of a known-altitude moving source using TDOA and FDOA in the presence of altitude error[J]. Digital Signal Processing, 2023, 132(1): 103798.
- [19] LI M Z, LI X J. A closed-form solution for moving target localization with sphere constraint[J]. IEEE Communications Letters, 2019, 23(7): 1207-1210.
- [20] HO K C, CHAN Y T. Ceolocation of a known altitude object from TDOA and FDOA measurements[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1997, 33(3): 770-783.
- [21] MARZETTA T L. A simple derivation of the constrained multiple parameter Cramer-Rao bound[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(6): 2247-2249.

作者简介



王 鼎 男,1982年10月出生于安徽省芜湖市. 现为中国人民解放军战略支援部队信息工程大学信息工程学院副教授、博士生导师. 主要研究方向为无线信号定位、阵列信号处理.

E-mail: wang_ding814@aliyun.com



尹洁昕(通讯作者) 女,1989年8月出生于河南省郑州市. 现为中国人民解放军战略支援部队信息工程大学信息工程学院副教授、硕士生导师. 主要研究方向为无线信号定位、阵列信号处理.

E-mail: Cindyin0807@163.com



王叶露 女,1990年7月出生于河南省安阳市. 现为中国人民解放军战略支援部队信息工程大学研究生. 主要研究方向为通信信号监测.

E-mail: 416469463@qq.com



徐文艳 女,1983年3月出生于安徽省界首市. 现为中国人民解放军战略支援部队信息工程大学信息工程学院讲师. 主要研究方向为通信信号识别与定位.

E-mail: 12551287@qq.com